حسابان — سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری-شهریور ماه ۱۳۸۷

۱- اگر $f(x)=۲x-۱$ و $g(x)=\begin{cases}\frac{۴x^۲-۱}{۲x+۱} & x\neq -\frac{۱}{۲}\\ ۱-k & x=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$ ، k را طوری بیابید که به ازای هر x متعلق به دامنه $f(x)=g(x)$

۲- نمودار تابع $y=۲\sqrt{x^۲-۶x+۹}$ را رسم کرده ، زوج یا فرد و نه زوج و نه فرد بودن آن را بررسی کنید.

۳- دو تابع $f(x)=\frac{x+۱}{x-۲}$ و $g(x)=\sqrt{x-۱}$ مفروضند ، در صورت وجود D_{fog} و ضابطه gof را معین کنید.

۴- a را چنان تعیین کنید که رابطه $\frac{۱}{\alpha+۱}+\frac{۱}{\beta+۱}=\frac{۵}{۶}$ میان ریشه‌های معادله $x^۲-(a+۲)x+a+۱=۰$ برقرار باشد.

۵- حدود زیر را در صورت وجود بیابید. ([ ] نماد جزء صحیح است)

الف) $\lim\limits_{x\to ۳^+}(\frac{۱}{x-۳}-\frac{۷}{x^۲-۹})$ ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[۳]{x+۱}}{x+۱}$ ج) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{[x]+|x|}{x+۱}$

۶- با استفاده از قضیه فشردگی ثابت کنید:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}(۲x-\frac{\pi}{۳})\sin\frac{۱}{x-\frac{\pi}{۶}}=۰$$

۷- مقادیر a و b را طوری محاسبه کنید که تابع زیر در نقطه $x_۰=۰$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}[x+۳]+a & x<۰\\ |x-۳|+\frac{b}{۲} & x=۰\\ \frac{\sin^۲x}{x^۲} & x>۰\end{cases}$$

۸- معادلات مجانب‌های افقی و قائم تابع $f(x)=\frac{x+۳}{\sqrt{x^۲+۲}}$ را در صورت وجود معین کنید.

۹- مشتق توابع زیر را حساب کنید (ساده کردن عبارات الزامی نیست)

الف) $f(x)=\frac{\sqrt{x+۲}}{x^۲-x}$ ب) $h(x)=\cos ۲x-۳\tan^۲(x+۱)$

۱۰- اگر $f(x)=x^۳-x$ و $y=f(\sin ۲x)$ ، $y'(x)$ را بدست آورید.

۱۱- معادلات خطوط مماس و قائم بر منحنی $x^۲-xy+y^۲=۱$ را در نقطه $(۱,۱)$ واقع بر آن ، بدست آورید.

۱۲- نشان دهید تابع هموگرافیک $y=\frac{ax-۲}{x+a+۲}$ برای تمام مقادیر a قبل و بعد از مجانب قائم خود صعودی است. سپس برای $a=۱$ مرکز تقارن تابع را معین کنید.

۱۳- مشتق‌پذیری تابع $f(x)=x|x-۱|$ را در نقطه $x_۰=۱$ بررسی کنید.

۱۴- جدول تغییر و نمودار تابع $y=\frac{\cos x}{۲\cos x-۱}$ را در $[۰,\pi]$ رسم کنید.

۱۵- با استفاده از آزمون مشتق دوم تعیین کنید تابع $y=\sqrt[۳]{x}$ در چه بازه تقعر رو به بالا و در چه بازه تقعر رو به پایین دارد؟

۱۶- نقطه‌ای روی تابع $f(x)=\sqrt{x}$ بیابید که از نقطه $(۴,۰)$ کمترین فاصله را داشته باشد.

۱۷- ابتدا نمودار تابع $f(x)=۳+|x-۲|$ را رسم کنید ، سپس $\int_۰^۳ f(x)dx$ را محاسبه نمایید.

پاسخ سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- شهریور ماه ۱۳۸۷

۱-

$(D_f = D_g = R)$ به ازای $x \neq -\frac{۱}{۲}$ ، $f(x) = y(x)$ است ، زیرا : $g(x) = \frac{۴x^۲ - ۱}{۲x+۱} = \frac{(۲x-۱)(۲x+۱)}{۲x+۱} = ۲x - ۱$

بنابراین کافی است که: $f(-\frac{۱}{۲}) = g(-\frac{۱}{۲})$

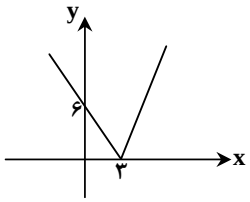
$$f(-\frac{۱}{۲}) = g(-\frac{۱}{۲}) \Rightarrow ۲(-\frac{۱}{۲}) - ۱ = ۱ - k \Rightarrow k = ۳$$

۲-

$y = ۲\sqrt{x^۲ - ۶x + ۹} = ۲|x-۳|$ $\quad x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳, y = ۰$

$D_y = R \rightarrow$ دامنه متقارن است

x	y
۲	۲
۳	۰
۴	۲



تابع نه زوج و نه فرد است. چون با توجه به شکل تابع نسبت به مبدأ و نسبت به محور عرض‌ها تقارن ندارد.

۳- ابتدا دامنه‌های f و g را تعیین می‌کنیم.

$$x - ۲ \neq ۰ \Rightarrow D_f = R - \{۲\}, x - ۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۱ \Rightarrow D_g = [۱, +\infty)$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \geq ۱ \mid \sqrt{x-۱} \neq ۲\} = [۱, ۵) \cup (۵, +\infty)$$

$\sqrt{x-۱} \neq ۲ \Rightarrow x - ۱ \neq ۴ \Rightarrow x \neq ۵$ $\qquad (gof)(x) = g(f(x)) = \sqrt{\frac{x+۱}{x-۲} - ۱} = \sqrt{\frac{۳}{x-۲}}$

۴-

$$S = -\frac{b}{a} = a + ۲ \qquad P = \frac{c}{a} = a + ۱$$

$$\frac{۱}{\alpha+۱} + \frac{۱}{\beta+۱} = \frac{\alpha+\beta+۲}{(\alpha+۱)(\beta+۱)} = \frac{S+۲}{P+S+۱} = \frac{a+۲+۲}{a+۱+a+۲+۱} = \frac{a+۴}{۲a+۴} = \frac{۵}{۶} \Rightarrow ۴a = ۴ \Rightarrow a = ۱$$

۵-

الف) $\lim\limits_{x \to ۳^+} \frac{x+۳-۷}{x^۲-۹} = \lim\limits_{x \to ۳^+} \frac{x-۴}{x^۲-۹} = \lim\limits_{x \to ۳^+} \frac{-۱}{۰^+} = -\infty$ $\qquad$ ب) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[۳]{x}}{x} = ۰$

ج) $\lim\limits_{x \to ۰^+} \frac{۰+x}{x+۱} = ۰$, $\lim\limits_{x \to ۰^-} \frac{-۱-x}{x+۱} = -۱ \Rightarrow ۰ \neq -۱$ حد ندارد

۶-

$$-۱ \leq Sin\frac{۱}{x - \frac{\pi}{۶}} \leq ۱ \Rightarrow \text{در } ۲x - \frac{\pi}{۳} \text{ ضرب می‌کنیم} \Rightarrow -(۲x - \frac{\pi}{۳}) \leq (۲x - \frac{\pi}{۳}) Sin\frac{۱}{x - \frac{\pi}{۶}} \leq ۲x - \frac{\pi}{۳}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۶}} -(۲x - \frac{\pi}{۳}) = \lim_{x \to \frac{\pi}{۶}} (۲x - \frac{\pi}{۳}) = ۰ \Rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{۶}} (۲x - \frac{\pi}{۳}) Sin\frac{۱}{x - \frac{\pi}{۶}} = ۰$$

۷- تابع f در $x = ۰$ در صورتی پیوسته است که : $\lim\limits_{x \to ۰^+} f(x) = \lim\limits_{x \to ۰^-} f(x) = f(۰)$

$$\lim_{x \to ۰^-} [x+۳] + a = ۲ + a$$

$$\lim_{x \to ۰^+} \frac{Sin^۲x}{x^۲} = \lim_{x \to ۰^+} \frac{x^۲}{x^۲} = ۱, f(۰) = ۳ + \frac{b}{۲} \qquad ۲ + a = ۱ \Rightarrow a = -۱, ۳ + \frac{b}{۲} = ۱ \Rightarrow \frac{b}{۲} = -۲ \Rightarrow b = -۴$$

۸-

$x^2+2>0 \Rightarrow$ تابع مجانب قائم ندارد

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x+3}{\sqrt{x^2+2}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{|x|}=\pm1\Rightarrow y=+1, y=-1$ مجانب‌های افقی

-۹

الف) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\times(x^2-x)-(2x-1)\sqrt{x+2}}{(x^2-x)^2}$

ب) $h'(x)=-2\sin 2x-6\tan(x+1)(1+\tan^2(x+1))$

۱۰- با توجه به رابطه $\big(f(u)\big)'=u'f'(u)$ داریم:

$$\left.\begin{matrix}y'=2\cos 2x f'(\sin 2x)\\ f'(x)=3x^2-1\end{matrix}\right\}\Rightarrow y'=2\cos 2x(3\sin^2 2x-1)$$

-۱۱

$y'=\dfrac{f'_x}{f'_y}=-\dfrac{2x-y}{-x+2y}\Rightarrow x=1, y=1$

شیب خط قائم $=-1\Rightarrow$ شیب خط مماس $=1$

معادله خط مماس $y-1=-(x-1)$ معادله خط قائم $y-1=(x-1)$

-۱۲

$y'=\dfrac{a(x+a+2)-(ax-2)}{(x+a+2)^2}=\dfrac{a^2+2a+2}{(x+a+2)^2}=\dfrac{(a+1)^2+1}{(x+a+2)^2}>0$ قبل و بعد از مجانب قائم خود صعودی‌اند

محل تلاقی مجانب‌های تابع هموگرافیک ، مرکز تقارن است.

$a=1\Rightarrow y=\dfrac{x-2}{x+3}\Rightarrow x+3=0\Rightarrow x=-3, y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2}{x+3}=1\Rightarrow w\begin{vmatrix}-3\\1\end{vmatrix}$

-۱۳

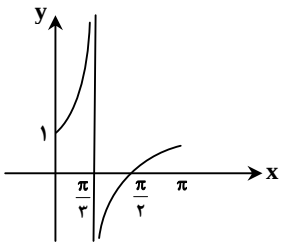
$f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x|x-1|}{x-1}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x(x-1)}{x-1}=1\\ \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-x(x-1)}{x-1}=-1\end{cases}\Rightarrow 1\neq -1$ مشتق‌پذیر نیست

۱۴- تابع‌های مثلثاتی مجانب افقی و مایل ندارند.

$2\cos x-1=0\Rightarrow\cos x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{3}$ مجانب قائم

$y'=\dfrac{\sin x}{(2\cos x-1)^2}=0\Rightarrow\sin x=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\Rightarrow y=1\\ x=\pi\Rightarrow y=\frac{1}{3}\end{cases}$

$y=0\Rightarrow\cos x=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}$



x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
y'	0	$+$	$\|$	$+$	0		
y	1	$\nearrow +\infty$	$\|$	$-\infty\nearrow 0$		$\nearrow \frac{1}{3}$	

-۱۵

$y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\qquad x\neq 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y''		$+$	$\|$	$-$	
y	جهت تقعر	رو به بالا	نقطه عطف	رو به پایین	

$$y'' = \frac{-۲}{۹x\sqrt[۳]{x^۲}} \qquad x \neq ۰$$

آزمون مشتق دوم برای تقعر: در بازه‌ای که $y'' < ۰$ است ، تقعر رو به پایین و در بازه‌ای که $y'' > ۰$ است ، تقعر رو به بالا است.

۱۶- هرگاه بخواهیم کمترین و یا بیشترین مقدار یک کمیت را بدست آوریم ، ابتدا آن را بر حسب یک مجهول نوشته ، سپس مشتق را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$A\left|\begin{matrix} x \\ \sqrt{x} \end{matrix}\right. , B\left|\begin{matrix} ۴ \\ ۰ \end{matrix}\right. \Rightarrow d = \sqrt{(x-۴)^۲ + (\sqrt{x})^۲} = \sqrt{x^۲ - ۷x + ۱۶} \qquad d' = \frac{۲x-۷}{۲\sqrt{x^۲ - ۷x + ۱۶}} = ۰ \Rightarrow x = \frac{۷}{۲} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{۷}{۲}}$$

۱۷-

$$\int_۰^۳ f(x)dx = \int_۰^۲ f(x)dx + \int_۲^۳ f(x)dx = \left[\frac{۳+۵}{۲}\times ۲\right] + \left[\frac{۳+۴}{۲}\times ۱\right] = ۸ + \frac{۷}{۲} = \frac{۲۳}{۲}$$

